Teoría de las decisiones y de los juegos.

Tema 4:

Juegos estáticos con información incompleta

1

¿Qué caracteriza a los juegos estáticos con información incompleta?

Supuestos básicos:

- Racionalidad
- Conocimiento mutuo de la racionalidad. Yo soy racional y sé que los otros jugadores son racionales y también sé que ellos saben que yo sé que ellos son racionales y que yo sé que ellos saben que yo sé que ellos son racionales ….
- Elección simultanea.
- Información incompleta de pagos de los jugadores.

2

Ejemplos

- Duopolio de Cournot pero sin saber los costes marginales de la otra empresa
- Subasta sin saber las valoraciones de los demás participantes
- Contribuciónes privadas a un bien público sin conocer costes o valoraciones de los demás
- Negociar con alguien sin conocer su disposición a pagar
- Batalla de los sexos sin saber si al otro le gusta mas el fútbol o el cine ….

Ejemplo 4.1:

El **jugador 1** puede elegir entre dos acciones **A** o **B.**
El **jugador 2** puede elegir entre dos acciones **I** o **D**
Los pagos dependen de los tipos de jugadores.
El jugador 1 es de un sólo tipo y éste es conocido por el jugador 2.
El jugador 2 puede ser del tipo *x* o de tipo *y*. El jugador 2 sabe su tipo pero el jugador 1 no sabe con certeza el tipo del jugador 2 (información asimétrica). El jugador 1 piensa que el jugador 2 es del tipo *x* con probabilidad 2/3, y del tipo *y* con probabilidad 1/3.

… Ejemplo 4.1

2 del tipo x (2/3)

1/2	*I*	*D*
A	(4, 3)	(3,1)
B	(3,6)	(2,3)

2 del tipo y (1/3)

1/2	*I*	*D*
A	(3, 3)	(1,6)
B	(1,1)	(5,3)

…Ejemplo 4.1

- Correspondencias de mejor respuesta.
  - El jugador 2 conoce su tipo (y el tipo del jugador 1):
    - **Si 2 es del tipo *x*:**

      La estrategia D está estrictamente dominada por la estrategia I. Su mejor estrategia (acción) para cualquier estrategia del jugador 1 será I.

      MR2x{A}=MR2x{B}= I
    - **Si 2 es del tipo *y*:**

      La estrategia I está estrictamente dominada por la estrategia D. Su mejor estrategia (acción) para cualquier estrategia del jugador 1 será D.

      MR2y{A}=MR2y{B}= D

…Ejemplo 4.1

- …Correspondencias de mejor respuesta.
  - El jugador 1 conoce su tipo pero no conoce el tipo del jugador 2:

    El jugador 1 evalúa su pago esperado jugando A y su pago esperado jugando B para las posibles estrategias del jugador 2. S2={II, ID, DI, DD}

    D si es del tipo *y*

    I si es del tipo *x*

Pago esperado de jugar A:

u(A, II) = (2/3) 4 + (1/3) 3 = 11/3

u(A, ID) = (2/3) 4 + (1/3) 1 = 9/3

u(A, DI) = (2/3) 3 + (1/3) 3 = 9/3

u(A, DD) = (2/3) 3 + (1/3) 1= 7/3

Pago esperado de jugar B:

u(B, II) = (2/3) 3 + (1/3) 1= 7/3

u(B, ID) = (2/3) 3 + (1/3) 5= 11/3

u(B, DI) = (2/3) 2 + (1/3) 1= 5/3

u(B, DD) = (2/3) 2 + (1/3) 5= 9/3

MR1{II}= A, MR1{ID}= B, MR1{DI}= A, MR1{DD}= B

7

…Ejemplo 4.1

- Equilibrio Bayesiano de Nash
  - Dado que el jugador 2 tiene estrategias dominantes jugará *I* si es del tipo *x* y jugará *D* si es del tipo *y.*
  - Ante la estrategia ID la mejor respuesta del jugador 1 es MR1{ID} = B.
  - **El único equilibrio bayesiano de este juego es (B, ID).**

    El jugador *1* elige *B* y el jugador *2* elige *I* si es del tipo *x* y *D* si es del tipo *y.*

8

Ejemplo 4.2

2 del tipo *x* (2/3)

1/2	*I*	*D*
A	(4, 1)	(3,3)
B	(3,6)	(2,3)

2 del tipo *y* (1/3)

1/2	*I*	*D*
A	(3, 6)	(1,3)
B	(1,1)	(5,3)

…Ejemplo 4.2

- Correspondencias de mejor respuesta.
  - El jugador 2 conoce su tipo (y el tipo del jugador 1):
    - **Si 2 es del tipo *x*:**
      MR2x{A}= D
      MR2x{B}= I
    - **Si 2 es del tipo *y*:**
      MR2y{A}= I
      MR2y{B}= D
  - **MR2(A)=DI , MR2(B)=ID**

…Ejemplo 4.2

- …Correspondencia de mejor respuesta.
  - El jugador 1 conoce su tipo pero no conoce el tipo del jugador 2:

    El jugador 1 evalúa su pago esperado jugando A y su pago esperado jugando B para las posibles estrategias del jugador 2. S2={II, ID, DI, DD}

Pago esperado de jugar A:

u(A, II) = (2/3) 4 + (1/3) 3 = 11/3
u(A, ID) = (2/3) 4 + (1/3) 1 = 9/3
u(A, DI) = (2/3) 3 + (1/3) 3 = 9/3
u(A, DD) = (2/3) 3 + (1/3) 1= 7/3

Pago esperado de jugar B:

u(B, II) = (2/3) 3 + (1/3) 1= 7/3
u(B, ID) = (2/3) 3 + (1/3) 5= 11/3
u(B, DI) = (2/3) 2 + (1/3) 1= 5/3
u(B, DD) = (2/3) 2 + (1/3) 5= 9/3

MR1{II}= A, MR1{ID}= B, MR1{DI}= A, MR1{DD}= B

…Ejemplo 4.2

- Equilibrio Bayesiano de Nash

MR1{II}= A
MR1{ID}= B
MR1{DI}= A
MR1{DD}= B

MR2(A)=DI
MR2(B)=ID

Tenemos dos EBN en estrategias puras = {{A, DI}, {B, ID}}

4.3 Representación en forma normal de un juego estático con información incompleta:

El conjunto de jugadores, $N=\{1,2,\ldots,n\}$

Las acciones/estrategias posibles, A_i $(i \in N)$

Los espacios de *tipos* de los jugadores, T_i $(i \in N)$

La distribución de probabilidades sobre combinaciones de tipos $p: T_1 \times \ldots \times T_n \rightarrow [0,1]$

Los pagos $u_i(a_1,\ldots,a_n; t_1,\ldots,t_n)$

$$G=\{N,\{A_i\}_{i=1}^n,\{T_i\}_{i=1}^n, p: T \rightarrow [0,1], \{u_i\}_{i=1}^n\}$$

13

Concepto de solución

- Equilibrio Bayesiano de Nash

14

Equilibrio Bayesiano de Nash

Definición: En el juego Bayesiano estático
$G=\{N ; A_1, A_2, \ldots, A_n; T_1,T_2,\ldots,T_n; p; u_1,u_2, \ldots, u_n\}$
una estrategia (pura) del jugador *i* es una función $s_i(t_i)$ donde, para cada tipo t_i en T_i, $s_i(t_i)$ determina la acción del conjunto factible A_i que el jugador i elegiría si el azar determinara que es del tipo t_i.

Necesitamos que $s_i^*(t_i)$ es solución al problema de optimización:

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u(s_1(t_1),\ldots,s_{i-1}(t_{i-1}),a_i,s_{i+1}(t_{i+1}),\ldots s_n(t_n);t)\ \textbf{Prob}(t_{-i} \mid t_i)$$

15

Donde $\text{Prob}(t_{-i} \mid t_i) = p(t_{-i},t_i)/(\sum_{t'_{-i} \in T_{-i}} p(t'_{-i},t_i))$

Ejemplo 4.3: Cournot con información incompleta

- Jugadores: Empresa 1 y 2.
- Acciones posibles: $A_1= A_2= q_i \geq 0,\ i=1,2.$
- Tipos: Las empresas pueden tener costos altos o bajos, $T_i= \{c_A, c_B\}$.
- La probabilidad de que una empresa tenga el coste alto es θ y es independiente del coste de la otra empresa.
- Pagos: $\pi_i= (a - Q)q_i - c_i\, q_i$ donde $Q = q_1 + q_2$.

16

Ejemplo 4.3: Cournot con información incompleta

- Jugador i, tipo t:

$E\pi_i = \theta(a - q_i^t - q_j^A - c_t)q_i^t + (1 - \theta)(a - q_i^t - q_j^B - c_t)q_i^t$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i^t} = a - 2q_i^t - c_t - [\theta q_j^A + (1-\theta)q_j^B] = 0$$
$$\Rightarrow q_i^t = (a - c_t - [\theta q_j^A + (1-\theta)q_j^B])/2$$

Solución :

$$c^E = \theta c_A + (1-\theta)c_B$$
$$q_i^t = q_j^t = q^t \text{ (simetría)}$$
$$q^E = \theta q^A + (1-\theta)q^B = (a - c^E)/3$$
$$\Rightarrow q_i^t = (a - c_t - q^E)/2$$

17

…Cournot con información incompleta

- Si $a = 17$, $c_A = 3$, $c_B = 1$ y $\theta = 1/2$

$c^E=2$, $q^E=(17-2)/3=5$

$q^A = (17-3-5)/2 = 4.5$

$q^B = (17-1-5)/2 = 5.5$

18

Ejemplo 4.4: Cournot con información asimétrica

- Jugadores: Empresa 1 y 2.
- Acciones posibles: $A_1 = A_2 = q_i \geq 0, i=1,2.$
- Tipos: La empresa 1 es de tipo $T_1 = \{c_A\}$ y es de conocimiento común. La empresa 2 puede tener costos altos o bajos, $T_2 = \{c_A, c_B\}$, el costo de 2 es información privada de la empresa 2.
- La probabilidad de que la empresa 2 tenga el coste alto es θ.
- Pagos: $\pi_i = (a - Q)q_i - c_i q_i$ donde $Q = q_1 + q_2$.

19

Ejemplo 4.4: Cournot con información incompleta

- Jugador 1, tipo c_A:

$$E\pi_1 = \theta(a - q_1 - q_2^A - c_A)q_1 + (1-\theta)(a - q_1 - q_2^B - c_A)q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2q_1 - c_A - [\theta q_2^A + (1-\theta)q_2^B] = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = (a - c_A - [\theta q_2^A + (1-\theta)q_2^B])/2$$

20

Ejemplo 4.4: Cournot con información incompleta

- Jugador 2, tipo t:

$\pi_2 = (a - q_2^t - q_1 - c_t)q_2^t$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2^t} = a - 2q_i^t - c_t - q_1 = 0$$
$$\Rightarrow q_2^t = (a - c_t - q_1)/2$$

"Solución" :
$$c^E = \theta c_A + (1-\theta)c_B$$
$$q_1 = (a - 2c_A + c^E)/3$$
$$q_2^t = (a - c_t - q_1)/2$$

21

Ejemplo 4.5: Subasta de primer precio

- Jugadores: Compradores 1 y 2.
- Acciones posibles: $A_1 = A_2 = b_i \geq 0,\ i=1,2.$
- Tipos: Los compradores pueden tener una valoración v_i independiente y uniformemente distribuida entre [0, 1].
- Pagos:

$$u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{si } b_i > b_j \\ (v_i - b_i)/2 & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

22

Ejemplo 4.5: Subasta de primer precio

Solución: $b_1(v_1)=v_1/2$, $b_2(v_2)= v_2/2$. ¿Por qué?

Dada la estrategia del jugador 2, nadie ofrecerá mas de ½.
Ofreciendo b, el jugador 1 gana la subasta si $b>b_2=v_2/2$, es decir, si $v_2 < 2b$. Su pago será

$$\int_0^{2b}(v_1-b)f(v_2)dv_2=\int_0^{2b}(v_1-b)dv_2=$$

$$=\left[(v_1-b)v_2\right]_0^{2b}=(v_1-b)2b-0$$

23

Lo cual es maximizado cuando $b=v_1/2$!

Ejemplo 4.6: Subasta de segundo precio

- Jugadores: Compradores 1 y 2.
- Acciones posibles: *A1= A2= $b_i \geq 0$, i=1,2.*
- Tipos: Los compradores pueden tener una valoración v_i independiente y uniformemente distribuida entre [0, 1].
- Pagos:

$$u_i(b_1,b_2;v_1,v_2)=\begin{cases} v_i-b_j & \text{si } b_i>b_j \\ (v_i-b_i)/2 & \text{si } b_i=b_j \\ 0 & \text{si } b_i<b_j \end{cases}$$

24

Ejemplo 4.6: Subasta de segundo precio

Solución: $b_1(v_1)=v_1$, $b_2(v_2)= v_2$. ¿Por qué?

Dada la estrategia del jugador 2, nadie ofrecerá mas de 1.
Ofreciendo b, el jugador 1 gana la subasta si $b>b_2=v_2$, es decir, si $v_2 < b$. Su pago será

$$\int_0^b (v_1 - v_2) f(v_2) dv_2 = \int_0^b (v_1 - v_2) dv_2 =$$

$$= \left[v_1 v_2 - \tfrac{1}{2} v_2^{\,2} \right]_0^b = b v_1 - \tfrac{1}{2} b^2 - 0$$

25

Lo cual es maximizado cuando $b=v_1$!